ماز

دورهٔ جمع‌بندی دوپینگ

یکشنبه
۱۴۰۴/۰۱/۱۰

بانک سؤالات کنکور:
جامع حد و پیوستگی:
(فصل ۵ یازدهم / فصل ۳ دوازدهم)

دفترچه پاسخ

دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی
حسابان

درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پیشنهادی
حسابان	۲۹	۱	۲۹	۵۱ دقیقه

هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم		هفته پنجم	هفته ششم
مباحث پایه	جامع تابع+توابع نمایی و لگاریتمی	جامع مثلثات	جامع حد و پیوستگی	جامع مشتق و کاربرد مشتق	-	الگو و دنباله، توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

دفترچهٔ مکمل دوپینگ: این دفترچه روز بعد از آزمون دوپینگ هر درس در اختیار شما قرار می‌گیرد و شامل بانک سؤالات کنکورهای سراسری ۹۸ تا ۱۴۰۳ در همان مبحث است تا ضمن مرور مجدد، سیر تست‌های کنکور در هر مبحث را به دقت مورد بررسی قرار دهید.

سؤالات کنکور: فصل ۵ یازدهم

۱- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & ; \quad x>2\\ ax-1 & ; \quad x\le 2\end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی، پیوسته است؟

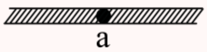
۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۵) (کنکور داخل ۹۸)

پیوستگی

وقتی تابع پیوسته باشد نقاط نمودار به هم متصل می‌باشند و اگر نمودار دارای حفره یا پرش (بریدگی) باشد، نمودار تابع ناپیوسته است.

شرایط پیوستگی تابع در نقطهٔ a



۱- تابع در نقطهٔ a و همسایگی آن تعریف شده باشد.

۲- حد تابع در نقطهٔ a موجود باشد. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=$ عدد مشخص

۳- مقدار تابع با حد تابع در نقطهٔ a برابر باشد. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

هر یک از ضابطه‌ها در دامنه تعریف خود پیوسته هستند، بنابراین برای اینکه تابع در R پیوسته باشد باید در نقطه مرزی $x=2$ نیز پیوسته باشد پس شرط پیوستگی را اعمال می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}}\times\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(3x-6)\times(x+\sqrt{x+2})}{x^2-(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(3x-6)\times 4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{12(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{12}{x+1}=\frac{12}{2+1}=\frac{12}{3}=4$$

توجه:

برای رفع ابهام حد بالا از دستور هوپیتال نیز می‌توان استفاده کرد.

$$f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1$$

$$\xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}}\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)\Rightarrow 2a-1=4\Rightarrow 2a=5\Rightarrow a=\frac{5}{2}=2/5$$

گروه آموزشی ماز

۲- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sin^2\pi x}{[x]+\cos\pi x}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) π ۴) 2π

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی/ محاسباتی ـ ۱۱۰۵) (کنکور خارج ۹۸)

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$$

قضیهٔ هوپیتال

اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\text{حدی } 0}{\text{حدی } 0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

محاسبهٔ حد توابع

برای محاسبهٔ حد توابعی که قسمتی از تابع را درون و بیرون براکت می‌بینیم کافی است ابتدا حد تابع براکتی را محاسبه کرده و به جای آن عدد قرار دهیم و بعد به محاسبهٔ حد (بدون وجود براکت) بپردازیم.

روش اول:

ابتدا تکلیف جزء صحیح را مشخص می‌کنیم و می‌دانیم که در همسایگی راست $x=1$ ، $[x]=1$ است، پس:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin^2 \pi x}{1+\cos\pi x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\cos^2\pi x}{1+\cos\pi x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(1+\cos\pi x)(1-\cos\pi x)}{1+\cos\pi x}=\lim_{x\to 1^+}(1-\cos\pi x)=1-(-1)=2$$

روش دوم:

با استفاده از قضیهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin^2\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin^2\pi x}{1+\cos\pi x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1^+}\frac{2\pi\cancel{\sin\pi x}\times\cos\pi x}{-\pi\cancel{\sin\pi x}}=\lim_{x\to 1^+}-2\cos\pi x=-2\times(-1)=2$$

گروه آموزشی ماز

۳- به ازای مقادیری از a و b، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x[x] & ; \quad |x|<1\\ ax+b & ; \quad |x|\geq 1\end{cases}$، بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. a کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) -1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۱۰۵) (کنکور خارج ۹۸)

اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=a$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

ابتدا تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و سپس با توجه به دامنه هر یک از ضابطه‌ها، پیوستگی تابع را در نقاط مشکوک $x=0$ و $x=\pm 1$ بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x[x] & ; \ -1<x<1\\ ax+b & ; \ x\geq 1 \, x\leq -1\end{cases}$$

با توجه به اینکه $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$ است، بنابراین تابع در $x=0$ پیوسته است. حال برای اینکه تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد باید تابع در نقاط $x=1$ و $x=-1$ نیز پیوسته باشد، پس:

$$\begin{cases}\lim_{x\to 1^-}x[x]=f(1)=\lim_{x\to 1^+}ax+b\Rightarrow a+b=0\\ f(-1)=\lim_{x\to (-1)^-}ax+b=\lim_{x\to(-1)^+}x[x]\Rightarrow -a+b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\ -a+b=1\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۴- حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}$، کدام است؟

۱) ۱/۵- ۲) ۱/۲- ۳) ۰/۸- ۴) ۰/۶-

پاسخ: گزینهٔ ۲ آزمون وی ای پی (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۵) (کنکور داخل ۹۹)

هوپیتال جان

اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\text{حدی } 0}{\text{حدی } 0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

این حد هنگامی که $x\to 1$، به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسد پس می‌توانیم از قضیهٔ هوپیتال استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}=\frac{2-7+5}{2-2}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{2-7\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}=\frac{2-\frac{7}{2}}{2-\frac{3}{4}}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}}=-\frac{12}{10}=-1/2$$

گروه آموزشی ماز

۵- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & ; \; |x-1|<1 \\ x^2+ax+b & ; \; |x-1|\geq 1\end{cases}$، یک تابع همواره پیوسته باشد، مقدار a، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$　　۲) -1　　۳) 1　　۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱　　(متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۵) (کنکور داخل ۹۹)

پیوستگی

تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه حد تابع (چپ و راست) در $x=a$، موجود (متناهی) و با مقدار تابع در این نقطه برابر باشد. یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

ابتدا دامنه ضابطه‌ها را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$|x-1|\geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1\geq 1 \Rightarrow x\geq 2 \\ x-1\leq -1 \Rightarrow x\leq 0\end{cases}$$

$$|x-1|<1 \Rightarrow -1<x-1<1 \Rightarrow 0<x<2$$

حال ضابطه تابع را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & 0<x<2 \\ x^2+ax+b & x\geq 2 \text{ یا } x\leq 0\end{cases}$$

برای اینکه تابع همواره پیوسته باشد، باید در نقاط مرزی $(x=2 \,,\, x=0)$ نیز پیوسته باشد. یعنی:

$$\begin{cases}\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x-1)[x]=1\times[2^-]=1 \\ f(2)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+ax+b)=4+2a+b\end{cases} \Rightarrow 4+2a+b=1 \Rightarrow 2a+b=-3$$

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)[x]=-1\times[0^+]=0 \\ f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+ax+b)=b\end{cases} \Rightarrow b=0 \xrightarrow{2a+b=-3} 2a+0=-3 \Rightarrow a=\frac{-3}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۶- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=[x]\sin\pi x; |x|\leq 2$، کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴　　(متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۱۰۵) (کنکور خارج ۹۹)

نکته ۱:

در تابع با ضابطه $y=[f(x)]$

۱) اگر به ازای $x=a$ عبارت داخل جزء صحیح برابر یک عدد غیرصحیح باشد $(f(a)\notin\mathbb{Z})$ در آن صورت تابع در نقطه $x=a$ پیوسته است.

۲) اگر به ازای $x=a$ عبارت داخل جزء صحیح برابر یک عدد صحیح باشد $(f(a)\in\mathbb{Z})$ در آن صورت داریم:

اگر $x=a$ نقطه مینیمم نسبی تابع $f(x)$ باشد تابع $y=[f(x)]$ در این نقطه پیوسته است.

در غیر این صورت تابع $y=[f(x)]$ در این نقطه ناپیوسته است

نکته ۲:

فرض کنید $y=[f(x)]$ در $x=a$ ناپیوسته است، حال اگر عبارتی مانند $g(x)$ که در $x=a$ برابر صفر است $(g(a)=0)$ در آن ضرب شود کل عبارت پیوسته خواهد شد.

$$y=g(x)[f(x)] \xrightarrow{g(a)=0} y \text{ در } x=a \text{ پیوسته}$$

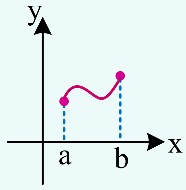
نکته ۳:

تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته است، هرگاه:

تابع f در همه نقاط بازه (a,b) پیوسته باشد.

این تابع در نقطه $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد، $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

این تابع در نقطه $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد. $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$



می‌دانیم که تابع $y=[x]$ در نقاط صحیح $(x\in\mathbb{Z})$ ناپیوسته است. از طرفی محدوده تعریف سوال، $(-۲\le x\le ۲)$ شامل پنج عدد صحیح $x=\pm۲$ ، $x=\pm۱$ و $x=۰$ است. بنابراین تابع $y=[x]$ در محدوده گفته شده در پنج نقطه ناپیوسته است. اما باید دقت کنیم که عبارت $\sin\pi x$ در تمام این نقاط برابر صفر می‌شود و چون این عبارت در $[x]$ ضرب شده است، لذا یک عامل صفر شونده به شمار می‌رود. بنابراین $y=[x]\sin\pi x$ در تمام نقاطی که احتمال ناپیوستگی در آن‌ها وجود داشته پیوسته بوده و لذا تعداد نقاط ناپیوستگی برابر صفر خواهد بود و گزینه ۴، گزینه مدنظر سازمان سنجش است.

گروه آموزشی ماز

۷- فرض کنید $a=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{\tan^۲(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)}{(۱-\cos(\sqrt{۲x}))^n}$ ، مقدار $a+n$ ، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) $\frac{۱۷}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

می‌دانیم که $\lim\limits_{u\to ۰}\tan^n u\sim u^n$ است، پس:

$$\lim_{x\to ۰}\tan^۲(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)\sim(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)^۲$$

از طرفی $۱-\cos^n u\sim\frac{nu^۲}{۲}$ می‌باشد، پس:

$$\lim_{x\to ۰}(\cos(\sqrt{۲x}))\sim ۱-\frac{(\sqrt{۲x})^۲}{۲}$$

حال روابط به دست آمده را در حد سوال جایگذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\tan^۲(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)}{(۱-\cos(\sqrt{۲x}))^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)^۲}{(۱-(۱-\frac{(\sqrt{۲x})^۲}{۲}))^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)^۲}{(\frac{۲x}{۲})^n}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x^۲}})^۲}{x^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(۱-\sqrt{۱-x^۲})^۲}{(۱-x^۲)x^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(۱-\sqrt{۱-x^۲}\times\frac{۱+\sqrt{۱-x^۲}}{۱+\sqrt{۱-x^۲}})^۲}{(۱-x^۲)x^n}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱-(۱-x^۲)}{۱+\sqrt{۱-x^۲}})^۲}{(۱-x^۲)x^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{x^۲}{۱+\sqrt{۱-x^۲}})^۲}{(۱-x^۲)x^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{x^۲}{۲})^۲}{x^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۴}{۴x^n}=a$$

حال برای اینکه حد فوق برابر عدد حقیقی a باشد، باید $n=۴$ باشد:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۴}{۴x^۴}=\frac{۱}{۴}=a\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۱}{۴}\\ n=۴\end{cases}\Rightarrow a+n=\frac{۱}{۴}+۴=\frac{۱۷}{۴}$$

گروه آموزشی ماز

۸- فرض کنید $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)-2\tan[x]}{x^n(1-\cos(\sqrt{3x}))}=a$ باشد. مقدار a^n، کدام است؟([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

اگر $u\to 0$ میل کند، پس:

$$\begin{cases}\sin u\sim u\\ \sin^n u\sim u^n\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos u\sim 1-\dfrac{u^2}{2}\\ \cos^n u\sim 1-\dfrac{nu^2}{2}\end{cases}\qquad \begin{cases}\tan u\sim u\\ \tan^n u\sim u^n\end{cases}$$

می‌دانیم که $\lim\limits_{u\to 0}\sin u\sim u$ است. پس:

$$\lim_{x\to 0}\sin(\sqrt{1-x^3}-1)\simeq\sqrt{1-x^3}-1$$

سپس به کمک $\lim\limits_{u\to 0}(1-\cos u)\sim\dfrac{u^2}{2}$ داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}(1-\cos\sqrt{3x})\simeq\frac{(\sqrt{3x})^2}{2}=\frac{3x}{2}$$

حال روابط به دست آمده را در حد سوال جایگذاری می‌کنیم: (توجه: $\tan[0^+]=\tan 0=0$)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)-2\tan[x]}{x^n(1-\cos\sqrt{3x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sqrt{1-x^3}-1)-2\cancel{\tan 0}}{x^n(\frac{3x}{2})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sqrt{1-x^3}-1)}{\frac{3}{2}(x^{n+1})}\times\frac{\sqrt{1-x^3}+1}{\sqrt{1-x^3}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3}{\frac{3}{2}x^{n+1}\underbrace{(\sqrt{1-x^3}+1)}_{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3}{3x^{n+1}}=a$$

برای آن‌که حاصل حد فوق برابر عدد شود باید $n+1\le 3$ باشد. (اگر $n+1>3$ باشد، حاصل حد، نامتناهی می‌شود.)

- اگر $n+1=3$ باشد:

$$n+1=3\Rightarrow n=2\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{-\cancel{x^3}}{3\cancel{x^3}}=a\Rightarrow a=\frac{-1}{3}$$

- اگر $n+1<3$ باشد:

$$n+1<3\Rightarrow n<2\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3}{3x^{n+1}}=0\Rightarrow a^n=0^n=\text{تعریف نشده یا صفر}$$

پس حاصل a^n برابر با $\frac{1}{9}=(-\frac{1}{3})^2$ است.

گروه آموزشی ماز

۹- حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) $-\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ از مون وی ای پی (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:

$$\text{اگر}\quad\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}-\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}$$ هوپیتال

۱۰- حاصل $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}$　　۲) $\sqrt{2}$　　۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۳　　(متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

نکته ۱

اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$

نکته ۲

$1-\cos 2x=2\sin^2 x$

روش اول:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{-2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}+\frac{5}{2\sqrt{2-5x}}}{-\cos\frac{x}{2}}=\frac{\frac{-3}{2\sqrt{2}}+\frac{5}{2\sqrt{2}}}{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

روش دوم:

بعد از ساده کردن مخرج کسر از هم‌ارزی $\sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{-2(\frac{x}{2})}\times\frac{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(2-3x)-(2-5x)}{-x(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{-x(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x})}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۱- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{2bx^2} & x>0\\ |b-x| & x=0\\ [x]-2a & x<0\end{cases}$ یک تابع همواره پیوسته است. مقدار حقیقی $b-a$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) $\frac{1}{4}$　　۳) $\frac{5}{4}$　　۴) $\frac{25}{16}$

پاسخ: گزینهٔ ۳　　(متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

نکته ۱

برای پیوسته بودن تابع $f(x)$ در $x=a$ باید:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

نکته ۲

$$\sin^2 u\underset{u\to 0}{\sim}u^2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{2bx^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2bx^2} = \frac{2\left(\frac{x^2}{4}\right)}{2bx^2} = \frac{\frac{1}{2}}{2b} = \frac{1}{4b}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1-2a$$

$$f(0) = |b|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4b} = -1-2a = |b| \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4b} \xrightarrow{b>0} b = \frac{1}{2} \\ -b = \frac{1}{4b} \xrightarrow{b<0} \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$\frac{1}{4\left(\frac{1}{2}\right)} = -1-2a \Rightarrow a = \frac{-3}{4}$$

$$b-a = \frac{5}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- برای مقدار مشخص k، تابع $f(x)=\begin{cases} |x-[-x]| & \text{زوج } [x] \\ x-[x]+k & \text{فرد } [x] \end{cases}$ در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته است. کدام مورد در خصوص n صحیح است؟ $(k,n\in\mathbb{N})$

۱) n زوج
۲) n فرد
۳) برای جمیع مقادیر n پیوسته است.
۴) برای هیچ مقداری از n پیوسته نیست.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

برای محاسبهٔ حد چپ و راست در جزء صحیح داریم:

۱) $\lim_{x\to k^+} [x]$ ۲) $\lim_{x\to k^-} [x]$ ۳) $\lim_{x\to k^+} [-x]$ ۴) $\lim_{x\to k^-} [-x]$

حالت ۱) اگر $k \notin \mathbb{Z}$، آن‌گاه مقدار تابع داده شده را به ازای $x=k$ حساب می‌کنیم.

مثال:

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} [-x] = \left[-\frac{1}{2}\right] = -1$$

حالت ۲) اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد، داریم:

حد ۱ $= k$
حد ۲ $= k-1$
حد ۳ $= -k-1$
حد ۴ $= -k$

اگر n فرد باشد:

$$\begin{cases} \lim_{x\to n^+} f(x) = n^+ - [n^+] + k = k \\ f(n) = k \\ \lim_{x\to n^-} f(x) = \left|n^- - [-(n^-)]\right| = \left|n^- - [(-n)^+]\right| = |2n| = 2n \end{cases} \Rightarrow 2n = k$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to(-n)^+} f(x) = (-n)^+ - [(-n)^+] + k = k \\ f(-n) = k \\ \lim_{x\to(-n)^-} f(x) = \left|(-n) - [n^+]\right| = |-2n| = 2n \end{cases} \Rightarrow 2n = k$$

اگر n زوج باشد:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=\left|n^+ - \left[-(n)^+\right]\right| = ۲n+۱ \\ f(n)=\left|n-[-n]\right| = ۲n & \Rightarrow ۲n \neq ۲n+۱ \neq k+۱ \\ \lim\limits_{x\to n^-} f(x) = n^- - \underbrace{\left[n^-\right]}_{n-۱}+k = k+۱\end{cases}$$

پس n فرد است.

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر $\frac{۱}{۴} = \lim\limits_{x\to ۰} \frac{a+\sqrt{bx+c}}{x}$ باشد، مقدار $\frac{ab}{c}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱-
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

امان از حد $\frac{۰}{۰}$

اگر حاصل $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ برابر عدد مشخص و حقیقی k باشد، در این صورت:

$$\xrightarrow{\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰} \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{۰ \text{حدی}} = k \Rightarrow$$

چون حاصل حد، عدد مشخص k می‌شود، پس حد باید مبهم $\left(\frac{۰}{۰}\right)$ شود در نتیجه صورت کسر یعنی f(a) هم صفر می‌شود (۰ حدی).

$$\xrightarrow{\lim\limits_{x\to a} f(x)=۰} \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۰ \text{حدی}}{g(a)} = k \neq ۰ \Rightarrow$$

چون حاصل حد، عدد مشخص k می‌شود، پس حد باید مبهم $\left(\frac{۰}{۰}\right)$ شود در نتیجه مخرج کسر یعنی g(a) هم صفر می‌شود (۰ حدی).

قضیهٔ هوپیتال: اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ برابر $\frac{۰ \text{حدی}}{۰ \text{حدی}}$ (مبهم) باشد برای رفع ابهام می‌توانیم از قضیهٔ هوپیتال به‌صورت زیر استفاده کنیم:

$$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

در حد داده شده، حد عبارت مخرج کسر به سمت صفر میل می‌کند ولی حاصل حد، عددی حقیقی و ناصفر است، بنابراین حد عبارت صورت کسر نیز باید به سمت صفر میل کند به عبارت دیگر:

$$\lim\limits_{x\to ۰}\frac{a+\sqrt{bx+c}}{x} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} a+\sqrt{bx+c} = ۰ \Rightarrow a+\sqrt{c} = ۰ \Rightarrow a = -\sqrt{c}$$

از طرفی می‌دانیم که $x=۰$ را در حد داده شده جای‌گذاری کنیم به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم که برای رفع ابهام از آن، داریم:

$$\lim\limits_{x\to ۰}\frac{a+\sqrt{bx+c}}{x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim\limits_{x\to ۰}\frac{\frac{b}{۲\sqrt{bx+c}}}{۱} = \frac{b}{۲\sqrt{c}}$$

می‌دانیم که حاصل حد فوق برابر $\frac{۱}{۴}$ است، پس:

$$\frac{b}{۲\sqrt{c}} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{c}}{۲}$$

در نتیجه، حاصل خواسته شده برابر است با:

$$\frac{ab}{c}=\frac{(-\sqrt{c})(\frac{\sqrt{c}}{2})}{c}=\frac{-c}{2c}=-\frac{1}{2}$$

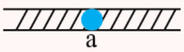
۱۴- به‌ازای برخی مقادیر صحیح نامنفی c، تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-4x+4} & |x-2|\le c\\ a(x-2)^2+b(x-2) & |x-2|>c\end{cases}$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است. چند مقدار برای $[ac]$ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیش از ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ آزمون وی ای پی (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

شرایط پیوستگی تابع در نقطهٔ a

۱- تابع در نقطهٔ a و همسایگی آن تعریف شده باشد.
۲- حد تابع در نقطهٔ a موجود باشد.
۳- مقدار تابع با حد تابع در نقطهٔ a برابر باشد.



$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=\text{عدد مشخص}$$
$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$$

ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-4x+4} & |x-2|\le c\\ a(x-2)^2+b(x-2) & |x-2|>c\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sqrt{(x-2)^2} & |x-2|\le c\\ a(x-2)^2+b(x-2) & |x-2|>c\end{cases}$$

حال، اگر $x-2$ را برابر t فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$f(t)=\begin{cases}|t| & |t|\le c\\ at^2+bt & |t|>c\end{cases}\Rightarrow f(t)=\begin{cases}at^2+bt & t<-c\\ |t| & -c\le t\le c\\ at^2+bt & t>c\end{cases}$$

هر یک از ضابطه‌های تابع f، در دامنهٔ تعریف خود، پیوسته هستند، حال برای اینکه تابع f در مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته باشد نیاز است که این تابع، در نقاط مرزی دامنه نیز پیوسته باشد، پس:

$$\lim_{t\to c^+}f(t)=\lim_{t\to c^-}f(t)=f(c)\Rightarrow ac^2+bc=|c|$$

$$\lim_{t\to(-c)^+}f(t)=\lim_{t\to(-c)^-}f(t)=f(-c)\Rightarrow a(-c)^2-bc=|-c|\Rightarrow ac^2-bc=|c|$$

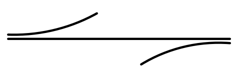
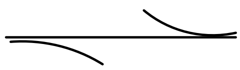
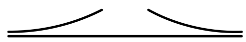
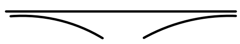
$$\begin{cases}ac^2+bc=|c|\\ ac^2-bc=|c|\end{cases}\xrightarrow{+}2ac^2=2|c|\xrightarrow[c\ge 0]{c\in\mathbb{Z}}ac^2=c\Rightarrow ac^2-c=0$$

$$\Rightarrow c(ac-1)=0\Rightarrow\begin{cases}c=0\Rightarrow ac=0\Rightarrow[ac]=0\\ ac=1\Rightarrow[ac]=1\end{cases}$$

بنابراین دو مقدار برای $[ac]$ وجود دارد و گزینهٔ ۲ صحیح است.

سؤالات کنکور: فصل ۳ دوازدهم

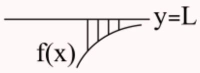
۱۵- نمودار تابع $y=\frac{2x^2-x-2}{x^2+2x}$، نسبت به مجانب افقی خود، در بی‌نهایت کدام وضع را دارد؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

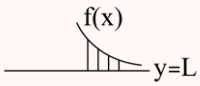
پاسخ: گزینهٔ ۱ — (متوسط ـ ترکیبی/ مفهومی ـ ۱۲۰۳) (کنکور خارج ۹۸)

وضعیت نمودار تابع

برای بررسی وضعیت نمودار تابع در بی‌نهایت که بالا یا پایین مجانب افقی قرار می‌گیرد کافی است ابتدا مجانب افقی تابع را به دست آوریم. فرض کنید $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ باشد پس $y=L$ مجانب افقی تابع است در این صورت حاصل حد $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-L)$ را به دست می‌آوریم اگر حاصل این حد ۰^+ باشد نمودار در $+\infty$ بالای مجانب افقی و اگر حاصل این حد ۰^- باشد نمودار تابع پایین مجانب افقی است.

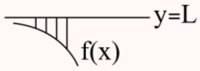


$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-L)=۰^-$

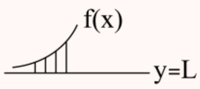


$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-L)=۰^+$

برای بررسی وضعیت تابع در $-\infty$ نیز حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-L)$ را بررسی می‌کنیم.



$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-L)=۰^-$



$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-L)=۰^+$

ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۲-x-۲ & x^۲+۲x \\ \cline{2-2} \underline{-۲x^۲-۴x} & ۲ \\ -۵x-۲ & \end{array} \Rightarrow y=۲+\frac{-۵x-۲}{x^۲+۲x}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} ۲+\dfrac{-۵x-۲}{x^۲+۲x}=۲+(۰^-)=۲^- \\ \lim\limits_{x\to-\infty} ۲+\dfrac{-۵x-۲}{x^۲+۲x}=۲+(۰^+)=۲^+ \end{cases}$$

در $+\infty$ حاصل حد تابع از ۲ کمتر است پس تابع پایین مجانب افقی خود قرار می‌گیرد.

در $-\infty$ حاصل حد تابع از ۲ بیشتر است پس تابع بالای مجانب افقی خود قرار می‌گیرد.

گروه آموزشی ماز

۱۶- فرض کنید $n\in\mathbb{N}$. حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{۲^{۲n+۱}-۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱}+۳\times۲^{۱-۲n}}$ ، کدام است؟

۱) ۱　　۲) $\frac{۱}{۳}$　　۳) $-\frac{۱}{۳}$　　۴) -۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ — (متوسط ـ ترکیبی/ مفهومی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۹۹)

در توابع نمایی به فرم $y=a^x+b^x+\dots$ $\begin{cases} \text{اگر } x\to+\infty \text{ : جمله با بزرگ‌ترین پایه را انتخاب می‌کنیم و بقیه را حذف می‌کنیم.} \\ \text{اگر } x\to-\infty \text{ : جمله با کوچک‌ترین پایه را انتخاب می‌کنیم و بقیه را حذف می‌کنیم.} \end{cases}$

در این سوال به حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ می‌رسیم. حال حد موردنظر را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۲^{۲n+۱}-۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱}+۳\times۲^{۱-۲n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(۲\times۴^n)-۲(\frac{۱}{۴})^n}{(۲\times۴^n)+۶(\frac{۱}{۴})^n}$$

زمانی که $n \to +\infty$ میل کند، عبارت $(\frac{۱}{۴})^n$ به سمت صفر میل می‌کند، بنابراین در مثبت بی‌نهایت می‌توانیم از این عبارت صرف‌نظر کنیم:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{۲ \times ۴^n}{۲ \times ۴^n} = ۱$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{-۲x^۲ + ۳x}{ax^۲ + bx + c}$ دارای خط‌های مجانب $y = -۱$، $x = -۲$ و $x = ۱$ است. $f(-۱)$ کدام است؟

۱) $۱/۲۵$ ۲) $۱/۵$ ۳) $۱/۷۵$ ۴) $-۱/۵$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۹۹)

قضیه پرتوان

اگر $x \to \infty$، در چندجمله‌ای‌ها، جمله با بیشترین توان را نگه می‌داریم و بقیه جملات را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x \to \infty} ax^n + bx^{n-۱} + \ldots \sim \lim_{x \to \infty} ax^n$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots}{a_m x^m + a_{m-۱} x^{m-۱} + \ldots} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{a_m x^m} = \begin{cases} \pm\infty & n > m \\ \frac{an}{am} & n = m \\ ۰ & n < m \end{cases}$$

مجانب افقی

اگر حد تابعی زمانی که $x \to \infty$، برابر عددی مانند a باشد، خط $y = a$ را مجانب افقی تابع می‌نامیم.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \Rightarrow \text{مجانب افقی تابع}: y = a$$

مجانب قائم

در توابع کسری ریشه‌های مخرج که ریشه صورت کسر نباشند، مجانب قائم تابع هستند، به عبارت دیگر در توابع به فرم $y = \frac{f(x)}{g(x)}$، ریشه‌های مخرج کسر می‌توانند مجانب قائم تابع باشند البته به شرطی که این ریشه‌ها، ریشه عبارت صورت کسر نباشند و حداقل در یک همسایگی آن‌ها تابع تعریف شود.

چون $y = -۱$ مجانب افقی تابع است. پس: $\lim_{x \to \infty} f(x) = -۱$

$$f(x) = \frac{-۲x^۲ + ۳x}{ax^۲ + bx + c}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -۱ \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{-۲x^۲}{ax^۲} = -۱ \Rightarrow \frac{-۲}{a} = -۱ \Rightarrow a = ۲$$

و چون $x = ۱$ و $x = -۲$ مجانب‌های قائم تابع هستند، بنابراین ریشه‌های مخرج تابع می‌باشند:

$$ax^۲ + bx + c = a(x-۱)(x+۲) \xrightarrow{a=۲} ۲x^۲ + bx + c = ۲(x^۲ + x - ۲) \Rightarrow ۲x^۲ + bx + c = ۲x^۲ + ۲x - ۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = ۲ \\ c = -۴ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{-۲x^۲ + ۳x}{۲x^۲ + ۲x - ۴}$$

حال $f(-۱)$ برابر است با:

$$f(-۱) = \frac{-۲(-۱)^۲ + ۳(-۱)}{۲(-۱)^۲ + ۲(-۱) - ۴} = \frac{-۲-۳}{۲-۲-۴} = \frac{-۵}{-۴} = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، حاصل $\lim_{n \to +\infty} \frac{۳^{۲n} - ۳^{-۲n+۱}}{۲ \times ۳^{۲n} + ۳^{-۲n+۱}}$، کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۰ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۳) (کنکور خارج ۹۹)

در توابع نمایی به فرم $y=a^x+b^x+\dots$

- اگر $x\to+\infty$: جمله با بزرگ‌ترین پایه را انتخاب کنیم و بقیه را حذف می‌کنیم.
- اگر $x\to-\infty$: جمله با کوچک‌ترین پایه را انتخاب می‌کنیم و بقیه را حذف می‌کنیم.

در این سوال به حالت $\frac{\infty}{\infty}$ می‌رسیم، حال حد موردنظر را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۳^{۲n}-۳^{-۲n+۱}}{۲\times۳^{۲n}+۳^{-۲n+۱}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(۹)^n-۳\times(\frac{۱}{۹})^n}{۲\times۹^n+۳(\frac{۱}{۹})^n}$$

زمانی که $n\to+\infty$، عبارت $(\frac{۱}{۹})^n$ به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین در بی‌نهایت می‌توانیم از این عبارت صرف‌نظر کنیم، پس:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۹^n}{۲\times۹^n}=\frac{۱}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^۲+۷x}{۲x^۲+bx+c}$، فقط یک مجانب قائم $x=۲$ دارد. اگر $f(۳)=۶$ باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن، کدام است؟

۱) $y=-۱$ ۲) $y=-\frac{۱}{۲}$ ۳) $y=\frac{۱}{۲}$ ۴) $y=\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۳) (کنکور خارج ۹۹)

هم‌ارزی پرتوان

اگر $x\to\infty$، در چندجمله‌ای‌ها، جمله با بیشترین توان را نگه می‌داریم و بقیه جملات را حذف می‌کنیم:

$$ax^n+bx^{n-۱}+\dots+c\xrightarrow[x\to\infty]{a\neq۰}ax^n$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+a'x^{n-۱}+\dots+c'}{bx^m+b'x^{m-۱}+\dots+c}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{bx^m}=\begin{cases}\infty & n>m\\ \frac{a}{b} & n=m\\ ۰ & n<m\end{cases}\qquad(m,n\in\mathbb{N})$$

ـ اگر حد تابعی زمانی که $x\to\infty$، برابر عددی مانند a باشد، خط $y=a$ را مجانب افقی تابع می‌نامیم:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a\Rightarrow \text{مجانب افقی تابع}: y=a$$

ـ در توابع کسری ریشه‌های مخرجی که ریشه صورت کسر نباشند، مجانب قائم تابع هستند، به عبارت دیگر در توابع به فرم $y=\frac{f(x)}{g(x)}$، ریشه‌های مخرج کسر می‌توانند مجانب قائم تابع باشند البته به شرطی که این ریشه‌ها، ریشه عبارت صورت کسر نباشند.

با توجه به گفته سوال، نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم $x=۲$ دارد. بنابراین مخرج کسر در ضابطه تابع باید ضریبی از $(x-۲)^۲$ باشد و چون در مخرج کسر ضریب $x^۲$ برابر ۲ است لذا عبارت مخرج کسر به صورت $۲(x-۲)^۲$ است. پس:

$$۲x^۲+bx+c=۲(x-۲)^۲\Rightarrow۲x^۲+bx+c=۲x^۲-۸x+۸$$

پس ضابطه تابع به صورت مقابل است:

$$f(x)=\frac{ax^۲+۷x}{۲x^۲-۸x+۸}$$

از طرفی می‌دانیم که $f(۳)=۶$ است، پس:

$$\frac{a(۹)+۷(۳)}{۲(۹)-۸(۳)+۸}=۶\Rightarrow\frac{۹a+۲۱}{۱۸-۲۴+۸}=۶\Rightarrow\frac{۹a+۲۱}{۲}=۶\Rightarrow۹a+۲۱=۱۲\Rightarrow۹a=-۹\Rightarrow a=-۱$$

حال برای پیدا کردن مجانب افقی تابع، حد تابع f را زمانی که $x\to\infty$ به دست می‌آوریم:

$$y=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^۲+۷x}{۲x^۲-۸x+۸}\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to\infty}\frac{-x^۲}{۲x^۲}=-\frac{۱}{۲}$$

۲۰- مقدار $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} \dfrac{10x-5+\left[\frac{3}{x^2}\right]}{16x-\left[-\frac{2}{x^2}\right]}$ ، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\infty$　　۲) صفر　　۳) $\frac{5}{8}$　　۴) $+\infty$

پاسخ: گزینهٔ ۱　　**(متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۰)**

ابتدا تکلیف براکت را مشخص می‌کنیم به عبارت دیگر باید مقدار براکت را تعیین کرده و سپس آن را درون حد جایگذاری کنیم:

$$x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^- : x<-\frac{1}{2}\Rightarrow x^2>\frac{1}{4}\Rightarrow \frac{1}{x^2}<4\Rightarrow\begin{cases}\frac{3}{x^2}<12\Rightarrow\left[\frac{3}{x^2}\right]=\left[12^-\right]=11\\ -\frac{1}{x^2}>-4\Rightarrow\frac{-2}{x^2}>-8\Rightarrow\left[-\frac{2}{x^2}\right]=\left[(-8)^+\right]=-8\end{cases}$$

حال حد داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+11}{16x-(-8)}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x+6}{16x+8}=\frac{-5+6}{(-8)^-+8}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- تابع $f(x)=\dfrac{ax^3-bx^2+2}{ax^3-bx+2}$ در دو نقطه ناپیوسته و فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد. مقدار a و b، کدام‌اند؟

۱) $a=0, b=2$　　۲) $a=8, b=10$　　۳) $a=-2, b=0$　　۴) $a=-8, b=-6$

پاسخ: گزینهٔ ۴　　**(دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۰)**

تابع f فقط دو مجانب موازی محورهای مختصات دارد و این به این معنی است که تابع f یک مجانب افقی و یک مجانب قائم دارد.

از طرفی تابع f در دو نقطه ناپیوسته است بنابراین مخرج کسر باید دو ریشه داشته باشد که این دو نقطه عبارتند از:

- مجانب قائم تابع (ریشه غیرمشترک صورت و مخرج) است.
- ریشه مشترک صورت و مخرج است که برای پیدا کردن ریشه مشترک صورت و مخرج، ضابطه صورت و مخرج کسر را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$ax^3-bx^2+2=ax^3-bx+2\Rightarrow bx^2-bx=0\Rightarrow bx(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که مخرج کسر به ازای $x=0$ صفر نمی‌شود، پس $x=1$ ریشه مشترک صورت و مخرج و نقطه دوم ناپیوستگی تابع است. در نتیجه:

$$ax^3-bx+2=0\xrightarrow{x=1}a-b+2=0\Rightarrow b=a+2\quad(*)$$

حال ضابطه تابع را به ازای $b=a+2$، بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{ax^3-bx^2+2}{ax^3-bx+2}=\frac{ax^3-(a+2)x^2+2}{ax^3-(a+2)x+2}=\frac{ax^3-ax^2-2x^2+2}{ax^3-ax-2x+2}$$

$$f(x)=\frac{ax^2(x-1)-2(x^2-1)}{ax(x^2-1)-2(x-1)}=\frac{ax^2(x-1)-2(x-1)(x+1)}{ax(x-1)(x+1)-2(x-1)}=\frac{(x-1)(ax^2-2(x+1))}{(x-1)(ax(x+1)-2)}$$

$$f(x)=\frac{ax^2-2x-2}{ax^2+ax-2}$$

از طرفی می‌دانیم که مخرج کسر باید دو ریشه داشته باشد، که $x=1$ یکی از ریشه‌های آن است. بنابراین برای اینکه این شرط برقرار باشد باید عبارت موجود در مخرج تابع فوق (یعنی $y=ax^2+ax-2$)، ریشه مضاعف داشته باشد، لذا:

$$ax^2+ax-2=0\xrightarrow{\Delta=0}a^2-4(a)(-2)=0\Rightarrow a^2+8a=0\Rightarrow a=0, a=-8$$

$$\xrightarrow{(*)}b=a+2\xrightarrow{a=-8}b=-6$$

دقت شود که $a=0$ قابل قبول نیست. زیرا به ازای $a=0$ مخرج فقط ۱ ریشه می‌دهد، پس: $a=-8$

گروه آموزشی ماز

۲۲- اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[50]{(a^2x^2-1)(a^4x^4-1)\dots(a^{100}x^{100}-1)}}{a^{49}x^k-1}=-1$ ، آنگاه مقادیر a و k، کدام‌اند؟

۱) $k=51, a=-1$ ۲) $k=51, a=1$ ۳) $k=49, a=-1$ ۴) $k=49, a=1$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

قضیه پرتوان

اگر $x\to\infty$ ، در چندجمله‌ای‌ها، جمله با بیشترین توان را نگه می‌داریم و بقیه جملات را حذف می‌کنیم:

$$ax^n+a'x^{n-1}+\dots\xrightarrow[x\to\infty]{a\neq 0}ax^n$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+a'x^{n-1}+\dots}{bx^m+b'x^{m-1}+\dots}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{bx^m}=\begin{cases}\infty & n>m\\ \dfrac{a}{b} & n=m\\ 0 & n<m\end{cases}\qquad (m,n\in\mathbb{N})$$

چون با حد نامتناهی سروکار داریم، بنابراین از قاعده پرتوان در صورت و مخرج کسر استفاده می‌کنیم، پس:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{(a^2x^2-1)(a^4x^4-1)\dots(a^{100}x^{100}-1)}}{a^{49}x^k-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{(a^2x^2)(a^4x^4)\dots(a^{100}x^{100})}}{a^{49}x^k}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{(ax)^{2+4+\dots+100}}}{a^{49}x^k}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{(ax)^{50\times 51}}}{a^{49}x^k}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left|(ax)^{51}\right|}{a^{49}x^k}=-1$$

توجه: برای جمع کردن اعداد زوج ۲ تا ۱۰۰ $(2+4+\dots+100)$ داریم:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{50}{2}(2+100)=\frac{50\times 102}{2}=50\times 51$$

حال، سوال را ادامه می‌دهیم. چون $x\to-\infty$ میل می‌کند:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left|a^{51}\right|\times(-x)^{51}}{a^{49}\times x^k}=-1$$

برای اینکه حاصل حد فوق برابر -1 باشد، باید $k=51$ و $a=1$ باشد.

گروه آموزشی ماز

۲۳- مقدار $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}\dfrac{16x-\left[-\frac{2}{x^2}\right]}{24x+\left[\frac{3}{x^2}\right]}$ ، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) صفر ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

ابتدا تکلیف براکت‌ها را در همسایگی راست $x=-\frac{1}{2}$ ، مشخص می‌کنیم:

$$x\to(-\tfrac{1}{2})^+ : x>-\frac{1}{2}\Rightarrow 0\le x^2<\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{x^2}>4$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{x^2}>12\to\left[\dfrac{3}{x^2}\right]=12\\[2mm] \dfrac{2}{x^2}>8\to\dfrac{-2}{x^2}<-8\to\left[\dfrac{-2}{x^2}\right]=-9\end{cases}$$

حال حد موردنظر را بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\frac{16x-(-9)}{24x+12}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\frac{16x+9}{24x+12}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\frac{16x+9}{12(2x+1)}=\frac{-8+9}{12(0^+)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

۲۴- اگر تابع $f(x)=\dfrac{x^{3}-5x+4}{(x-a)(4x^{2}-4x+1)}$، فقط دارای دو مجانب باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

ابتدا ضابطه تابع را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x^{2}+x-4)}{(x-a)(2x-1)^{2}}=\frac{(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-a)(2x-1)^{2}}$$

چون ریشه عبارت $(2x-1)^{2}$، (یعنی $x=\frac{1}{2}$)، ریشه هیچ‌یک از عبارت‌های صورت نیست لذا $x=\frac{1}{2}$ مجانب قائم تابع است و چون حد در $x\to\infty$ برابر $\frac{1}{4}$ می‌شود. بنابراین $y=\frac{1}{4}$ نیز تنها مجانب افقی تابع است.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3}}{4x^{3}}=\frac{1}{4}$$

تا به اینجا تابع ۲ مجانب را دارد و برای اینکه تابع f مجانب دیگری نداشته باشد باید یکی از اتفاقات زیر رخ بدهد:

۱) $(x-a)$ با یکی از ریشه‌های صورت حذف بشود پس a می‌تواند α، β و یا ۱ باشد.

۲) ریشه $(x-a)$ با ریشه عبارت $(2x-1)^{2}$ برابر باشد، یعنی $x=\frac{1}{2}$ ریشه عبارت $(x-a)$ باشد.

پس مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با:

$$\frac{1}{2}+\overbrace{\alpha+\beta}^{-1}+1=\alpha+\beta+\frac{3}{2}=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

توجه:

$\alpha+\beta$، همان جمع ریشه‌های معادله $x^{2}+x-4=0$ است. پس:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{-1}{1}=-1$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- تابع $f(x)=\dfrac{|ax+1|+2x}{|x|+b}$ دارای دو مجانب افقی و دو مجانب قائم است، اگر هر ریشه مخرج با یکی از حدهای تابع در بی‌نهایت برابر باشد، حاصل $\lim_{x\to1^{+}} f(x)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) ۱ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته ۱

مجانب‌های افقی تابع $f(x)$، از حد f در بی‌نهایت به‌دست می‌آیند.

نکته ۲

مجانب‌های قائم ریشه‌های مخرج تابع هستند به شرطی که ریشه صورت نباشند.

$$\begin{matrix} y=|a|\pm 2 & \text{مجانب‌های افقی} \\ x=\pm b & \text{مجانب‌های قائم}\end{matrix} \xrightarrow{b<0} \begin{cases}|a|+2=-b\\ |a|-2=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|a|=0\\ b=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2x+1}{|x|-2}\Rightarrow \lim_{x\to1^{+}} f(x)=-3$$

توجه:

$b<0 \leftarrow |x|=-b \leftarrow |x|+b=0$

۲۶- نقطه $A(-\frac{1}{2}, 3)$ محل تلاقی مجانب‌های نمودار $y=\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1}$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

نکته ۱

مجانب‌های افقی نمودار تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ از حد در بی‌نهایت آن به‌دست می‌آید.

نکته ۲

مجانب‌های قائم نمودار تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ ریشه‌های مخرج هستند که ریشه صورت نباشند.

$$\begin{cases} y=\frac{b}{4} \text{ مجانب افقی} \\ y=3 \text{ عرض محل برخورد} \end{cases} , \quad \begin{cases} \text{ریشه مخرج} = \text{مجانب قائم} \\ \text{طول محل برخورد} = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{4}=3 \Rightarrow b=12 \\ 4(-\frac{1}{2})^2+a(-\frac{1}{2})+1=0 \Rightarrow -\frac{a}{2}+2=0 \Rightarrow a=4 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a}=3$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- f تابع هموگرافیک، $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g^{-1}(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^{-1}(x)}$ است، کدام عدد می‌تواند حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{-1}(x)$ باشد؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

حد در $\pm\infty$:

اگر f و g، دو چندجمله‌ای از درجهٔ m و n باشند، آن‌گاه داریم:

$$f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0$$
$$g(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

۱) $m>n \leftarrow L=\infty$ یا $L=-\infty$

۲) $m<n \leftarrow L=0$

۳) $m=n \leftarrow L=\frac{a_m}{b_n}$

می‌دانیم که اگر $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$؛ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، تابعی هموگرافیک باشد، در این صورت:

$$f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

طبق گفته سوال: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$، پس:

$$g(x)=\frac{cx+d}{ax+b} \xrightarrow{g^{-1}} g^{-1}(x)=\frac{-bx+d}{ax-c}$$

از طرفی:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^{-1}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g^{-1}(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^{-1}(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{ax+b}{cx+d}}{\frac{-bx+d}{ax-c}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(ax+b)(ax-c)}{(cx+d)(-bx+d)}=\frac{a^2x^2}{-bcx^2}=\frac{a^2}{-bc}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g^{-1}(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-bx+d}{ax-c}}{\frac{cx+d}{ax+b}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(ax+b)(-bx+d)}{(cx+d)(ax-c)}=\frac{-bax^2}{cax^2}=\frac{-b}{c}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{-bc}=\frac{-b}{c}\Rightarrow a^2=b^2\Rightarrow a=\pm b$$

در نتیجه، حاصل خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x\to 0^+}f^{-1}(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-dx+b}{cx-a}=-\frac{b}{a}\xrightarrow{a=\pm b}\pm 1$$

گروه آموزشی ماز

۲۸- اگر $f(x)=\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2$ و $f(x)=xg(x)+1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:

قاعدهٔ هوپیتال: اگر $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید می‌گوییم حد مبهم است. برای رفع ابهام آن می‌توان از روش زیر کمک گرفت:

اگر f و g مشتق‌پذیر باشند:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ابتدا تابع $g(x)$ را می‌سازیم:

$$f(x)=xg(x)+1\Rightarrow g(x)=\frac{f(x)-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\frac{f'(x)}{1}\xrightarrow{x=0}f'(0)$$

$$f(x)=\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2$$

$$f'(x)=2\left(\frac{\cos x(1+\sin x)-(\cos x)(-1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}\right)\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)=\frac{4\cos x(-1+\sin x)}{(1+\sin x)^3}$$

حال، $x=0$ را جایگزین می‌کنیم:

$$f'(0)=\frac{4\times 1(-1)}{1}=-4$$

توجه:

$$f(x)=u^n\Rightarrow f'(x)=nu'u^{n-1}$$

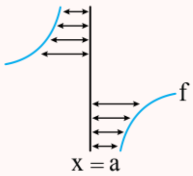
گروه آموزشی ماز

۲۹- برای چند مقدار a تابع $f(x)=\dfrac{2x^2+x-6}{ax^2+(a-2)x+4}$ یک مجانب قائم دارد؟

۱) ۵   ۲) ۴   ۳) ۳   ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱   (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

مجانب قائم



خط $x=a$ را مجانب قائم تابع $f(x)$ می‌گوییم هرگاه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$. نمودار تابع به مجانب قائم نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. $x=a$ زمانی مجانب قائم تابع است که حداقل در یک همسایگی آن، تابع تعریف شود. برای به‌دست آوردن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج تابع کسری را به‌دست می‌آوریم البته در صورتی که صورت را صفر نکند. توابعی مانند $y=\sin x$ که برد محدود دارند، مجانب قائم ندارند.

دل به کار بده و گوش کن

اگر تابع $f(x)=\dfrac{g(x)}{ax^2+bx+c}$ ($g(x)$ چندجمله‌ای می‌باشد) دارای ۱ مجانب قائم باشد یا مخرج درجهٔ اول است و ریشه‌ای دارد که ریشهٔ صورت نیست یعنی $a=0$ و یا مخرج ریشهٔ مضاعفی دارد که ریشهٔ صورت نیست $(\Delta=0)$ و یا مخرج ۲ ریشه دارد که یکی از ریشه‌های آن، صورت را نیز صفر می‌کند.

سه حالت وجود دارد:

۱) مخرج از درجهٔ ۱ باشد: که برای اینکه این حالت رخ بدهد، ضریب x^2 باید برابر صفر باشد.

$$y=ax^2+(a-2)x+4 \Rightarrow a=0 \Rightarrow -2x+4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{مجانب قائم}$$

۲) مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد: که برای اینکه این حالت رخ بدهد، Δ مخرج باید برابر صفر باشد.

$$y=ax^2+(a-2)x+4$$

$$\Delta=0 \Rightarrow (a-2)^2-4(a)(4)=0 \Rightarrow a^2-4a+4-16a=0 \Rightarrow a^2-20a+4=0$$

$$\xrightarrow{\Delta>0} \text{دو مقدار برای } a \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{20+\sqrt{384}}{2}=\dfrac{20+8\sqrt{6}}{2}=10+4\sqrt{6} \\ a=\dfrac{20-\sqrt{384}}{2}=\dfrac{20-8\sqrt{6}}{2}=10-4\sqrt{6} \end{cases}$$

۳) اگر یکی از ریشه‌های صورت با یکی از ریشه‌های مخرج برابر باشد، آن‌گاه صورت و مخرج ساده می‌شوند و مخرج از درجه یک می‌شود که در این صورت تابع f یک مجانب قائم خواهد داشت:

$$f(x)=\frac{2x^2+x-6}{ax^2+(a-2)x+4}=\frac{(2x-3)(x+2)}{ax^2+(a-2)x+4}$$

ریشه‌های صورت را پیدا می‌کنیم و در عبارت مخرج جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \Rightarrow a(\dfrac{9}{4})+(a-2)(\dfrac{3}{2})+4=0 \Rightarrow \dfrac{9a}{4}+\dfrac{3a}{2}-3+4=0 \Rightarrow \dfrac{15a}{4}=-1 \Rightarrow a=\dfrac{-4}{15} \\ x=-2 \Rightarrow 4a+(a-2)(-2)+4=0 \Rightarrow 4a-2a+4+4=0 \Rightarrow 2a=-8 \Rightarrow a=-4 \end{cases}$$

بنابراین به ازای ۵ مقدار مختلف برای a، تابع f یک مجانب قائم خواهد داشت.

$$a=\left\{-4,-\frac{4}{15},0,10-4\sqrt{6},10+4\sqrt{6}\right\}$$

توجه کنید که در این سؤال نیازی نبود که مقادیر a را به‌دست بیاوریم چرا که فقط تعداد آن‌ها برای ما مهم بود ولی شاید سال‌های بعد مقدارشون رو هم از ما پرسیدن، پس شما برای هر چیزی خودتو آماده کن.

گروه آموزشی ماز